saberes y prácticas
REVISTA DE FILOSOFÍA Y EDUCACIÓN
ISSN 2525-2089

Representación, reconocimiento y significado del número irracional y la función periódica en la formación del Profesorado de Educación Secundaria

Representation, recognition and meaning of the irrational number and the periodic function in the training of Secondary Education Teachers

Representação, reconhecimento e significado do número irracional e da função periódica na formação de professores do ensino médio

Luis Darío Reina
Instituto de Educación Superior Nº9-011 "Del Atuel", Argentina.
https://orcid.org/0000-0002-3315-5207
ldr14142@gmail.com

Miguel R. Wilhelmi
Universidad Pública de Navarra, España.
https://orcid.org/0000-0002-6714-7184
miguelr.wilhelmi@unavarra.es

Recibido: 11/05/2020
Aceptado: 13/03/2021
DOI: https://doi.org/10.48162/rev.36.023

Resumen. En este trabajo se estudia un fenómeno didáctico que puede emerger en la construcción de dos nociones matemáticas, a saber, los números irracionales y la función periódica (Reina y Wilhelmi, 2017; 2019). Se analizan los conflictos semióticos asociados al reconocimiento visual de la periodicidad numérica y funcional. Se observa que estos conflictos se pueden agrupar fundamentalmente en tres dimensiones: una, cognitiva, relativa a la forma de adquisición de las nociones por los sujetos, en especial en aquellos aspectos relativos a la percepción visual; otra, epistémica, relativa al significado atribuido a los objetos matemáticos; y, finalmente, de enseñanza, relativa a reglas del contrato didáctico. El estudio fundamenta teóricamente y aporta datos empíricos sobre las dificultades asociadas a estas tres dimensiones en la construcción de número irracional y de la función periódica.

Palabras clave. fenómeno didáctico, número irracional, función periódica, mimetización ostensiva, percepción visual.

Abstract. This work studies a didactic phenomenon that can emerge in the construction of two mathematical notions, namely, irrational numbers and the periodic function (Reina and Wilhelmi, 2017; 2019). The semiotic conflicts associated with the visual recognition of numerical and functional periodicity are analyzed. It is observed that these conflicts can be grouped fundamentally in three dimensions: one, cognitive, relative to the form of acquisition of the notions by the subjects, especially in those aspects related to visual perception; another, epistemic, relative to the meaning attributed to mathematical objects, and, finally, teaching, relative to the rules of the didactic contract. The study provides a theoretical basis and provides empirical data on the difficulties associated with these three dimensions in the construction of the irrational number and the periodic function.

Keywords. didactic phenomenon, irrational number, periodic function, ostensive mimicry, visual perception.

Sumário. Este trabalho estuda um fenômeno didático que pode emergir na construção de duas noções matemáticas, a saber, os números irracionais e a função periódica (Reina e Wilhelmi, 2017; 2019). São analisados os conflitos semióticos associados ao reconhecimento visual da periodicida de numérica e funcional. Observa-se que esses conflitos podem ser agrupados fundamentalmente em três dimensões: uma, cognitiva, relativa à forma de aquisição das noções pelos sujeitos, principalmente naqueles aspectos relacionados à percepção visual; outra, epistêmica, relativa ao significado atribuído aos objetos matemáticos e, por fim, didática, relativa às regras do contrato didático. O estudo fornece uma base teórica e fornece dados empíricos sobre as dificuldades associadas a essas três dimensões na construção do número irracional e da função periódica.

Palavras-chave. fenômeno didático, número irracional, função periódica, mimetismo ostensivo, percepção visual.

Introducción

Se conoce hace más de 2500 años la noción de inconmensurabilidad[1] entre segmentos, atribuida al grupo de los pitagóricos. Esta noción inconmensurabilidad, origen de los números irracionales, está fuertemente ligado a la historia de la filosofía.

> El infinito aparece por primera vez en la civilización griega con Anaximandro, s VI a. c, de la escuela de Tales de Mileto. Anaximandro proponía que la primera sustancia de la cual están hechas todas las cosas es el ápeiron, que concibió como algo neutral, imperecedero, infinito, ilimitado. (López, 2014, p.279)

[1] Dados dos longitudes *a* y *b*, se dice que son conmensurables si existen dos números *n* y *m*, enteros positivos ($n, m \in \mathbf{Z}^+$), tal que: $a \cdot n = b \cdot m$; esto es, la razón de *a* y *b* es el número racional n/m. En caso contrario (no existencia de *n* y *m* en las condiciones antes dichas), las cantidades *a* y *b* se dicen inconmensurables (Reina et al. 2012, p.72).

Estas primeras preguntas son “caldo de cultivo” de la noción de inconmensurabilidad de longitudes, es decir, la imposibilidad de encontrar dos números naturales “*a*” y “*b*” cuyo cociente (*a/b*) sea la medida de una determinada longitud, siendo necesario hacer “infinitas” particiones cada vez menores para obtener sucesivas aproximaciones a esa longitud. Así, la razón, en el sentido filosófico, es capaz de definir por primera vez lo inapresable sin recurso a la metáfora o a referencias transcendentes o religiosas. Además, la noción de inconmensurabilidad dota al infinito de nuevo significado, a saber: no como extensión de espacio o tiempo, sino como proceso reiterado en la materia continua. Con otras palabras, la razón demuestra (por una vez y para siempre) que lo limitado puede “encerrar” lo infinito.

Esta aparente paradoja precisará de mucho tiempo hasta evolucionar en la comprensión actual del número irracional. A partir de 1872, tanto Cantor (1845-1918) como Dedekind (1831-1916) demuestran la irracionalidad de un número real sobre la base de trabajos de varios matemáticos anteriores (Collette, 2007, pp.357-382).No sólo se produce en esos años un avance en la constitución del número irracional sino también una ruptura con el paradigma anterior.

Así, “Dedekind consideraba el principio de continuidad de Eudoxo inconsistente, estableciendo la necesidad de un desarrollo de la aritmética. […] El trabajo de Dedekind cambió el estatus epistemológico de los irracionales, que pasaron a ser ‘números’” (Reina et al., 2012, p.75).

El desarrollo histórico del número irracional permite afirmar una gran complejidad de la noción, que se debe tener en cuenta para la identificación de conflictos y obstáculos didácticos en el proceso de estudio de dicho objeto. Algunas de las dificultades y conflictos se revelan en el proceso de visualización de la noción.

Reina y Wilhelmi (2017) muestran resultados de experimentación con estudiantes de nivel secundario y de formación docente en Matemáticas sobre la búsqueda de periodicidad y aperiodicidad numérica de algunos números reales, como un medio para determinar la naturaleza racional o irracional de un número real.

> Se plantea el estudio del reconocimiento de patrones y regularidades en la búsqueda de la periodicidad y de aperiodicidad numérica por futuros docentes de Matemáticas (FDM) (2º año de formación terciaria no universitaria) y por estudiantes de 3ºde Educación Secundaria (15-16 años). En el cuestionario propuesto se incluye la expansión decimal de los números (Reina y Wilhelmi, 2017, p.5).

El objetivo de esta investigación, desde una metodología cualitativa-cuantitativa, es “observar la identificación de la naturaleza de un número real a partir de su representación decimal” (Reina y Wilhelmi, 2017, p.1).

En el cuestionario propuesto se incluyen la expansión decimal de los números:

- $\mathrm{f}(50) = \sqrt{\frac{9}{121} \cdot 100^{50} + \frac{(112-44\cdot 50)}{121}}$
- $\frac{1}{998}$

En ambos casos, no se muestra la fracción ni la raíz cuadrada que dan origen a la expansión decimal de los números. De esta forma, dado que no es posible *a priori* reconocer si un número es racional o irracional solo por sus cifras decimales, se pone de manifiesto que las respuestas están condicionadas por cuestiones de *contrato didáctico* (Brousseau, 2007) o, de manera más extensa, por la *dimensión normativa* (Godino, Font, Wilhelmi y de Castro, 2009).

Para el primer número, $f(50)$, los resultados indican que la mayoría de los FDM creen reconocer la no periodicidad "infinita" en la cifras decimales de los números. En sus conclusiones, los FDM apelan a la no posibilidad de expresión en fracción de números enteros y al hecho de que reconocen que "es periódico por partes". Únicamente dos alumnos responden correctamente que no pueden determinarlo (tabla 1) (Reina y Wilhelmi, 2017, p.6).

Tabla 1. Determinación de la naturaleza de $f(50)$ y 1/998 (Reina y Wilhelmi, 2017, p.6).

	2º FDM		3º Secundaria (14-15 años)	
Naturaleza de número	Nº cebra $f(50)$	1/998	Nº cebra $f(50)$	1/998
Irracional	16	14	31	25
Racional	2	5	0	6
No se puede determinar	2	1	0	0

Los investigadores señalan, a través de los resultados obtenidos, "que la identificación de la naturaleza de un número real a partir de su representación decimal es problemática" (Reina y Wilhelmi, 2017, p.1).

Asimismo, una segunda noción matemática que se estudia en el presente documento es la función periódica, que fue objeto de estudio por Cotes, Euler y Fourier.

Roger Cotes (1682-1716), matemático de Cambridge y discípulo de Newton, identifica el período de algunas funciones, "Cotes fue unos de los primeros matemáticos que reconoció la periodicidad de las funciones trigonométricas y que dio a conocer el período de las funciones tangente y secante" (Collette, 2007, p.164).

Euler (1707-1783) estudia el problema de la "cuerda vibrante" y allí se hace presente la propiedad de periodicidad de una función, como lo señalan Buendía y Montiel (2009):

En 1739, Euler presenta el trabajo *De novo genere oscillationum* sobre movimientos con propiedades comunes: la oscilación. Entre ellos reconoce a la cuerda vibrante, las ondas de sonido que produce la campana, las ondulaciones del agua y los flujos (o corrientes) marinas [...] Su propuesta es hacer funciones periódicas a partir de extender, por ejemplo, una función $f(x) = hx\ (a - x)$: explota pues el carácter repetitivo que da pie a la propiedad periódica. (pp. 1287-1288)

Jean Baptiste-Joseph Fourier (1768-1830) resuelve el problema de la "propagación del calor", en su obra "Teoría analítica del calor" (1822). En dicha memoria hace referencia a las funciones periódicas. "Fourier demuestra que toda función periódica par $\left(f(x) = f(-x)\right)$o impar $\left(f(x) = -f(-x)\right)$ puede ser desarrollada en series de senos o cosenos, respectivamente" (Collette, J.P., 2007, p.346).

La evolución de la periodicidad de una función da muestras que dicha propiedad pasa entonces a ocupar un lugar importante en la Teoría de funciones.

Reina y Wilhelmi (2019) estudian las dificultades en el reconocimiento de la periodicidad funcional considerando al objeto matemático como no transparente. Proponen como el análisis del diferente comportamiento de funciones trigonométricas; por ejemplo, por un lado, cuasiperiódica f $(f(x) = sen(ex) + sen(x))$, sin período mínimo, y, por otro lado, g $(g(x) = sen(2{,}7\ x) + sen(x))$, con período mínimo $(p = 20\pi)$.El estudio revela dificultades y conflictos relativos al estudio del proceso de visualización del objeto "función periódica" tales como:

- La representación gráfica de las funciones.
- La representación analítica de las funciones.
- Al hallazgo del período fundamental o mínimo de las funciones estudiadas.
- Las limitaciones de los artefactos empleados en el reconocimiento de la periodicidad funcional, a saber, software de computadora, aplicación para celular, motor de respuesta, etc.

En el apartado siguiente se introducen los constructos teóricos que posibilitan el análisis didáctico de las cuestiones enunciadas.

Marco teórico

Según el Enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (EOS) los objetos matemáticos son emergentes de sistemas de prácticas. Esta emergencia debe considerar, en primera instancia, las entidades que se pueden observar en un texto matemático (problemas, definiciones, proposiciones, etc.) y, en segunda instancia, la tipología de objetos que emerge de las distintas maneras de ver, hablar, operar, etc., es decir, a su naturaleza personal o institucional, ostensiva (representada) o no ostensiva (mental), por su significado propio o el atribuido como parte de un sistema de nociones o procesos matemáticos (Godino et al., 2009).

Así, el proceso de visualización es crucial en la práctica matemática, dado que con conlleva interpretación, acción y relación (Godino et al., 2012). Además, en el análisis de la función de la visualización en la actividad matemática se deben tener en cuenta las dualidades o modalidades contextuales (figura 1).

Figura1. Dualidades de la visualización (Godino et al., 2012, p.118).

Por ello, "se introducen las necesarias distinciones entre objetos visuales personales (cognitivos), e institucionales (socio-epistémicos); objetos visuales particulares (extensivos) y generales (intensivos); objetos visuales ostensivos (materiales) y no-ostensivos (mentales, ideales, inmateriales); objetos visuales unitarios (usados como un todo global) y sistémicos (formados por un sistema de elementos estructurados)” (Godino et al., 2012, pp. 117-118).

En este trabajo se analizan las prácticas donde intervienen los números irracionales y la función periódica según estas dualidades teóricas (figura 1).Los conflictos semióticos[2]que se suscitan en los cuestionarios empleados son de naturaleza epistémica y cognitiva.

En el apartado siguiente se estudian las dificultades didácticas que la percepción visual, como parte del proceso de visualización, puede generar al momento de reconocer, por sus cifras decimales, al objeto número irracional.

La percepción visual como fuente de conflictos y dificultades en el reconocimiento de la irracionalidad numérica

Recordemos que se puede definir un número irracional de una forma “sencilla” por negación: “un número irracional es un número real que no es racional” (Larson et al., 1995, p.4).Sin embargo, esta aparente sencillez matemática oculta dificultades cognitivas en el reconocimiento de las representaciones e instruccionales en la gestión de procesos de estudio.

Una de las representaciones numéricas más empleadas en Educación Secundaria es la del desarrollo decimal de un número real. Esta representación puede presentar potencialidades, pero también limitaciones que se concretan en dificultades a la hora de intentar conceptualizar tanto el número racional como el irracional, tanto en nivel secundario (Reina y Wilhelmi, 2020, en prensa) como en nivel superior (Reina, 2016; Reina y Wilhelmi, 2017).

El empleo de expresiones decimales de números reales con “pocas” cifras decimales, tanto en libros de texto como en el desarrollo de la docencia en secundaria (en particular, con el uso de la calculadora), trae aparejado potencialidades didácticas (búsqueda de regularidades, patrones, aproximaciones), pero también limitaciones que, si no se prevén, conllevan conflictos semióticos y obstáculos en otros niveles educativos. Por ejemplo, ¿cómo se podría gestionar con los medios convencionales el hecho de que el número racional 1/113 tiene un período de 112 cifras (figura 2).

$$\frac{1}{113} = 0{,}0088495575221238938053097345132743362831858407079646017699115044247787610619469026548672566371681415929203539823$$
$$0088495575221238938053097345132743362831858407079646017699115044247$$
$$787610619469026548672566371681415929203539823\ldots$$

Figura 2. Número racional con período de 112 cifras decimales (en color rojo).

Otros números racionales es posible que detenten un período aún mucho mayor. En la figura 3 se muestra la expansión decimal del 1/998, que tiene un periodo de 498 cifras, cuya

[2]“Un conflicto semiótico es cualquier disparidad o discordancia entre los significados atribuidos a una expresión por dos sujetos (personas o instituciones). Si la disparidad se produce entre significados institucionales hablamos de conflictos semióticos de tipo epistémico, mientras que si la disparidad se produce entre prácticas que forman el significado personal de un mismo sujeto los designamos como conflictos semióticos de tipo cognitivo” (Godino et al., 2006, pp.221-252).

percepción visual es complicada si no se conoce previamente este comportamiento. En todo caso, no se puede observar con una calculadora convencional[3].

$\frac{1}{998}$ = 0,0010020040080160320641282565130260521042084168336673346693386773547094l

8837675350701402805611222444889779559118236472945891783567134268537074148296 59

3186372745490981963927855711422845691382765531062124248496993987975951903807 61

5230460921843687374749498997995991983967935871743486973947895791583166332665 33

0661322645290581162324649298597194388777555110220440881763527054108216432865 73

1462925851703406813627254509018036072144288577154308617234468937875751503006 01

2024048096192384769539078156312625250501002004008016032064...

Figura 3.Mil decimales del número racional que presenta un período de 498 cifras.

Inclusive algunos números racionales como los siguientes “tienen una parte periódica en base 10 con una longitud 1.750.000.000 y 1.000.000.000.060, respectivamente” (Aragón Artacho et al., 2013, p.303).

$$\frac{3624360069}{7000000001} \text{ y } \frac{123456789012}{1000000000061}$$

En estos últimos casos, salvo que se utilice un software específico de reconocimiento de cifras, es inviable reconocer el periodo y, por lo tanto, salvo que se conozca también la fracción generatriz, la expresión decimal sin duda se asociará a un número irracional.

Así, si a una persona se le muestra la pantalla de una calculadora científica “común” con doce dígitos y se le consulta sobre la naturaleza del número lo más probable es que tenga dificultad en hallar una regularidad o en conjeturar un período, salvo que se observe una repetición clara que conste de pocas cifras decimales y sea “visible” en esos reducidos doce dígitos. Pero aun en este caso no dejará de ser una conjetura, puesto que es posible construir números que “en apariencia” son racionales, siendo irracionales. Por ejemplo:

$$\sqrt{\frac{9^{12}}{9^{13}-1}} = 0,333333333333\ldots \neq \frac{1}{3}$$

La construcción de este tipo de números se puede realizar en Educación Secundaria utilizando, por ejemplo, una hoja de cálculo, que permita automatizar los cálculos (figura 4).

[3]Se puede obtener en línea mediante el software WolframAlpha (https://www.wolframalpha.com/). Para ello es suficiente introducir la orden “N[1/998,1000]”, que arrojaría una aproximación con 1000 cifras decimales. Además, si se introduce el número sin aproximación, es decir, “1/998”, se obtiene información diversa, en particular la longitud del periodo (498).

	A	B	C	D	E	F	G
1	n	9^n	9^n-1	1/9=9^(n-1)/9^n	raiz(D*)	9^(n-1)/(9^n-1)	raiz(F*)
2	1	9	8	0,111111111111	0,333333333333	0,125000000000	0,353553390593
3	2	81	80	0,111111111111	0,333333333333	0,112500000000	0,335410196625
4	3	729	728	0,111111111111	0,333333333333	0,111263736264	0,333562192498
5	4	6561	6560	0,111111111111	0,333333333333	0,111128048780	0,333358738869
6	5	59049	59048	0,111111111111	0,333333333333	0,111112992819	0,333336155883
7	6	531441	531440	0,111111111111	0,333333333333	0,111111320187	0,333333646947
8	7	4782969	4782968	0,111111111111	0,333333333333	0,111111134342	0,333333368180
9	8	43046721	43046720	0,111111111111	0,333333333333	0,111111113692	0,333333337205
10	9	387420489	387420488	0,111111111111	0,333333333333	0,111111111398	0,333333333764
11	10	3486784401	3486784400	0,111111111111	0,333333333333	0,111111111143	0,333333333381
12	11	31381059609	31381059608	0,111111111111	0,333333333333	0,111111111115	0,333333333339
13	12	2,8243E+11	2,8243E+11	0,111111111111	0,333333333333	0,111111111112	0,333333333335
14	13	2,54187E+12	2,54187E+12	0,111111111111	0,333333333333	0,111111111111	0,333333333333

Figura 4. Construcción del número irracional $\sqrt{\frac{9^{12}}{9^{13}-1}}$ con apariencia de racional 1/3.

Esta apariencia de número racional cuando en realidad es irracional no sucede en casos "extraños" o "aislados" como el descrito en la figura 4, sino que diferentes autores han construido familias enteras de números con esta apariencia (Delahaye, 2004 ; Pickover, 2007), números que son estudiados en la actualidad por sus patrones y regularidades en sus cifras decimales y en otros desarrollos (Tóth, 2020).En todos estos caso, la dualidad ostensivo-no ostensivo de la visualización juega un papel destacado en las dificultades señaladas.

Con otras palabras, se debe tener en cuenta el juego del lenguaje al utilizar expresiones materiales (notaciones, símbolos, gráficos, etc.), es decir, "lo ostensivo", que denota objetos ideales ("lo no ostensivo").

Debería bastar la expresión fraccionaria (formada por números enteros) de estos números para que el estudiante los identifique como racionales, sin embargo, eso no siempre ocurre y aparecen conflictos semióticos (Reina y Wilhelmi, en prensa).Así, estudiantes de nivel superior también tienen grandes dificultades al intentar reconocer la periodicidad o la aperiodicidad de un número real sólo por sus cifras decimales, sin conocer la estructura de origen (Reina, 2016).El fenómeno didáctico que se observa en dicho estudio es el de "mimetismo ostensivo de objetos matemáticos", según el cual los estudiantes al observar el desarrollo decimal de un número racional creen "ver" a un número irracional o viceversa.

Así, se identifican tres dualidades para marcan las dificultades en la discriminación entre números racionales e irracionales:

- Dualidad ostensivo-no ostensivo, dificultades en el juego del lenguaje por la distinción entre la representación material (pública) y el objeto ideal (pensado).
- Dualidad expresión-contenido, dificultades en la función que los objetos cumplen en las funciones semióticas como antecedente y consecuente en la comunicación.
- Dualidad personal-institucional, dificultades asociadas a la diferencia entre el significado personal construido y el institucional pretendido.

Asimismo, Reina y Wilhelmi (en prensa) estudian el reconocimiento de la irracionalidad de un número por sus cifras decimales en Educación Secundaria, pero esta vez mostrando su estructura de origen. Constatan también el fenómeno de mimetismo ostensivo. Así, cabe preguntarse: ¿queda el estudiante de nivel superior “atado” al reconocimiento de un número racional o irracional sólo por la cantidad de cifras decimales que es posible mostrar en un artefacto como una calculadora o computadora?

Las limitaciones impuestas por los artefactos tecnológicos, a saber, calculadora científica, software de computadora o aplicaciones para celular, juegan un papel importante a la hora de conjeturarla periodicidad numérica por sus cifras decimales.

Para intentar visualizar las dificultades didácticas a las que se enfrenta un estudiante de nivel superior a la hora de construir la noción de número irracional empleamos la metáfora del “iceberg didáctico”.

Dicho “témpano” (figura 5) está formado en su cara visible por el objeto matemático, su definición y propiedades asociadas. En su cara sumergida y, por lo tanto, oculta, se encuentran las dificultades y fenómenos didácticos que emergen en el proceso de estudio de dicha noción.

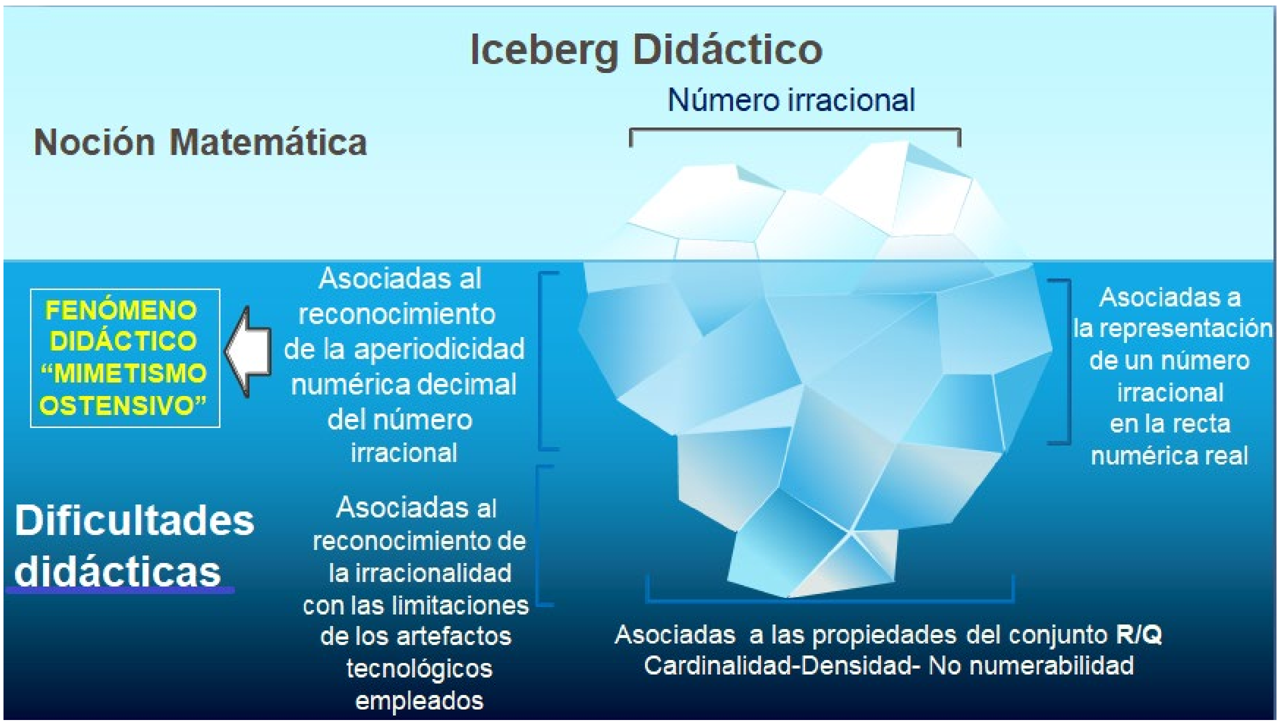

Figura 5.Metáfora del iceberg didáctico para interpretar las dificultades didácticas asociadas a la construcción del objeto número irracional.

La explicación del fenómeno didáctico se puede encontrar en la intersección de cuestiones cognitivas, asociadas al proceso de visualización del objeto en la que se destaca la percepción visual. También a cuestiones de estado de conocimiento por el estudiante, de la noción de número irracional y a cuestiones de contrato didáctico (Brousseau, 2007) presentes en los procesos de estudio (Reina, 2016) (figura 6).

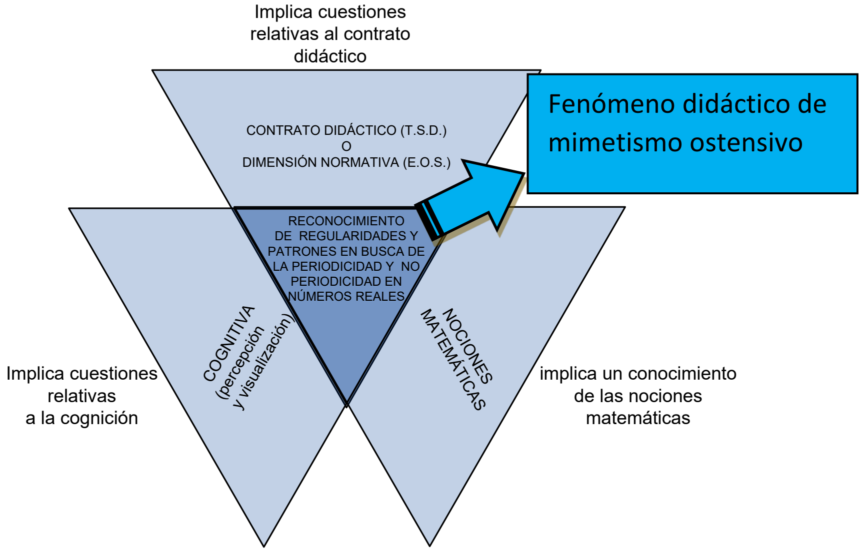

Figura 6. Mimetismo ostensivo.

La percepción visual de los estudiantes al observar varias cifras decimales presenta muchas limitaciones, asimismo la representación decimal de un número irracional también posee limitaciones.

3.1. Los números irracionales y su representación en fracción continua

Otros tipos de representaciones de números reales, como la de fracción continua, pueden presentar algunas ventajas sobre la representación decimal, la de ser finita cuando el número es racional e infinita cuando se trata de un número irracional (Rey Pastor et al., 1969).

$$\frac{188}{123} = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2}}}}} = [1; 1,1,8,3,2] \quad \text{Fracción continua finita}$$

$$\sqrt{17} = 4 + \cfrac{1}{8+\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{8+\ddots}}}}} = [4; 8,8,8,8,8, \dots] \quad \text{Fracción continua infinita}$$

Además la fracción continua simple puede mostrar el desarrollo periódico de un número irracional, en el caso de un irracional cuadrático, y éste puede ser puro o mixto.

$$2 + \sqrt{6} = [\overline{4; 2}] \text{ Fracción continua simple periódica pura}$$

$$\sqrt{6} = [2; \overline{2,4}] \text{ Fracción continua simple periódica mixta}$$

Si en vez de expresar en forma decimal a los números racionales y a los irracionales se realiza el desarrollo en fracción continua, suponiendo que los estudiantes de nivel superior sean expuestos a la construcción de esta noción, las dificultades en el reconocimiento de la irracionalidad de un número real se verían disminuidas. A su vez esto último permitiría el hallazgo de familias de números irracionales, como los metálicos o la resolución de ecuaciones diofánticas lineales o ecuaciones de Pell-Fermat (Reina, 2016).

Los números irracionales y su representación en fracción continua cuasiperiódica y aperiódica

También el desarrollo en fracción continua puede ser cuasi-periódico, o sea un número irracional puede presentar cuasi-periodicidad, es el caso, por ejemplo, del número $e = [2\,;\overline{1\,,2n\,,1}]_{n=1}^{\infty}$(Komatsu, 1999, p.334), el cual presenta algunos cocientes parciales con repetición infinita y otros cocientes no repetidos infinitamente dentro del cuasi-período.

Es más, la fracción continua puede no presentar ningún período, pero si presentar regularidades y patrones en su desarrollo en fracción continua generalizada. Euler (1748) estudia en profundidad las fracciones continuas; por ejemplo, da la expresión del número π de la siguiente forma:

$$\frac{\pi}{4} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{2 + \cfrac{49}{2 + \cfrac{81}{2+\ddots}}}}}$$

Esta expresión presenta regularidades, dado que los denominadores de las sucesivas fracciones son los cuadrados de los números impares: 1^2= 1, 3^2= 9, 5^2= 25, 7^2= 49, 9^2= 81, etc.

Las limitaciones de los artefactos tecnológicos empleados en el desarrollo de un número en fracción continua, también es un aspecto a tener en cuenta si se desea instrumentar su enseñanza en Educación Secundaria o Superior. Por ejemplo, no es posible expresar en el software GeoGebra el desarrollo en fracción continua de $\frac{1}{8999999999999999999999999991}$(figura7).

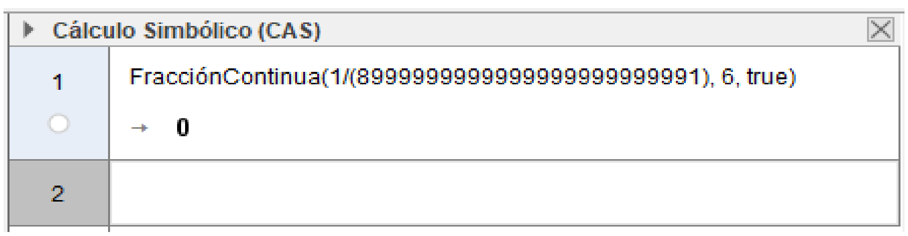

Figura 7. Representación con GeoGebra de una fracción no nula.

Por tanto, la demostración es el único camino viable para determinar si un número es irracional, en formación docente, aunque, didácticamente hablando, presenta la dificultad de las herramientas matemáticas avanzadas que resultan necesarias para tal demostración. En la actualidad los matemáticos emplean en sus demostraciones sobre la irracionalidad o la trascendencia de un número real otras representaciones para tal fin, por ejemplo la ya señalada fracción continua (Adamczewski, 2013).

En efecto, emplear otros tipos de representaciones de los números irracionales, diferentes a la decimal, como la fracción continua, puede contribuir a que el estudiante para profesor tenga una visión más holística del objeto.

Desde un punto de vista ontosemiótico, el problema no es si hay que introducir una sola representación de un objeto o más de una, ni qué traducciones o relaciones entre representaciones hay que tener en cuenta. El problema está realmente en determinar si las representaciones introducidas facilitan, o no, la realización de las prácticas que interesan que formen parte del significado global del alumno, en saber si aumentan o disminuyen la complejidad semiótica y también en saber si producen o no conflictos semióticos innecesarios. (Font et al., 2007, p.15).

Por ello es importante que el futuro profesor conceda importancia a las elecciones de las representaciones y su adaptación al proceso de estudio de la noción junto a sus futuros alumnos.

Así los profesores tendrán que elegir las representaciones mejor adaptadas al proceso de construcción de los significados personales de los estudiantes. En particular, habrá que tener en cuenta que esta construcción puede exigir un alejamiento de una realidad concreta, que en el caso de los números irracionales será insoslayable (Reina, Wilhelmi y Lasa, 2012, p.72).

En el próximo apartado nuevamente la percepción visual juega un papel importante en el proceso de la construcción de otra noción, a saber, la de función periódica.

4. La percepción visual como fuente de conflictos y dificultades en el reconocimiento de la periodicidad funcional

En el caso de la función periódica nuevamente su definición reviste una aparente "sencillez" matemática: "En general diremos que una función $y = f(x)$ es periódica con período *p* cuando: $f(x) = f(x + p)$ para todo *x*. En seguida se ve que todo múltiplo $n \cdot p$ de un período es también un período; por ejemplo: $f(x + 2p) = f(x + p + p) = f(x + p) = f(x)$" (Rey Pastor et al., 1969, p.419).

También la definición de "período primitivo o mínimo" es "accesible", matemáticamente hablando: "Si $f(x)$ es una función periódica que no se reduce a una constante, sus períodos son los múltiplos enteros del menor número positivo *p*, y solo ellos. … El número *p* se llama *período primitivo* de $f(x)$" (Rey Pastor et al., 1969, p.419).

Las primeras aproximaciones a funciones periódicas se transitan en los últimos años de la Educación Secundaria. Allí se estudian las funciones trigonométricas y, en el caso de escuelas de modalidad técnica, un caso particular de funciones periódicas, las "sinusoidales", muy empleadas en fenómenos de tipo ondulatorios "Llamaremos así a la función $y = f(x) = ksen(\omega x + \alpha)$, donde $k > 0$(amplitud), $\omega > 0$ (pulsación) y α (fase inicial) son tres constantes. Su período primitivo es $p = \frac{2\pi}{\omega}$" (Rey Pastor et al., 1969, p.419).

Las funciones sinusoidales se emplean muy a menudo para modelizar fenómenos de diferentes ciencias (Thomas y Finney ,1998).

Pero, ¿qué ocurre con la periodicidad de una función que es suma de funciones sinusoidales? En el próximo apartado se da una respuesta a esta cuestión.

4.1. La suma de funciones sinusoidales: un punto de encuentro entre la conmensurabilidad numérica y la periodicidad funcional

Recordemos que podemos conocer analíticamente si la suma de dos funciones periódicas de igual o diferente período es periódica

> La suma de dos funciones sinusoidales de igual período es una función sinusoidal del mismo período. Si las funciones sinusoidales tienen períodos p_1 y p_2 distintos, su suma no es ya una función sinusoidal. No obstante, si los períodos son *conmensurables*, es decir, si su cociente $\frac{p_1}{p_2} = \frac{m}{n}$ es racional, todo múltiplo común $np_1 = mp_2$ es también un período de la suma, que resulta así una función periódica aunque no sinusoidal (Rey Pastor et al., 1969, p.421).

Por ejemplo, las funciones f y g, definidas en todo **R** mediante las fórmulas $f(x) = sen(4x)$, $g(x) = sen(2\,x)$, tienen respectivamente los períodos $p_1 = \frac{2\pi}{4} = \frac{1}{2}\pi$ y $p_2 = \frac{2\pi}{2} = \pi$. Así, la función suma h,$h(x) = sen(4x) + sen(2x)$, es también periódica, ya que el cociente de períodos es racional:$\frac{p_1}{p_2} = \frac{\frac{1}{2}\pi}{\pi} = \frac{1}{2}$. El periodo de la función h es π (figura 8).

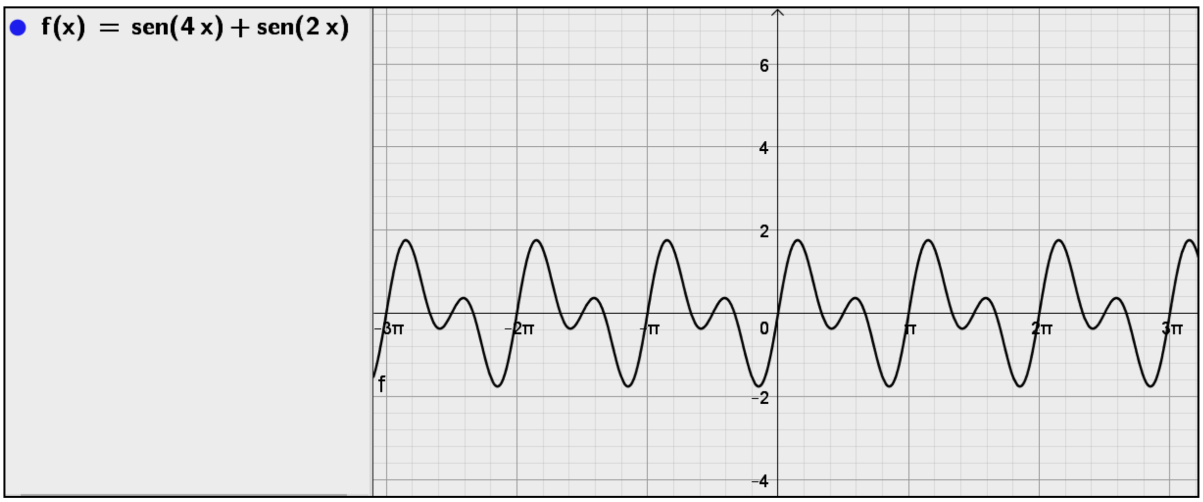

Figura 8. Función suma de dos funciones periódicas cuyo cociente entre períodos es racional.

Así, en el estudio de la periodicidad de las funciones suma es necesario, para el estudiante de nivel superior, el haberse apropiado previamente de las nociones de número racional e irracional. Además, también es importante para el reconocimiento de la periodicidad de la función suma tanto el análisis de las propiedades de los números reales como de las funciones periódicas en sí mismas.

Por ejemplo Stupel (2012) en base al trabajo de Singh(2011) muestra la técnica para hallar el m.c.d. y el m.c.m. de dos números racionales escritos como fracción. “Cuando no es fácil encontrar el m.c.m. de dos fracciones, es posible aplicar la fórmula presentada por Singh (2011) para encontrar el m.c.m. de dos fracciones irreducibles $p, q, e, f \in Z\ y\ e, f \neq 0$ “(p.58).

$$m.c.m.\left(\frac{p}{q}, \frac{e}{f}\right) = \frac{m.c.m.\text{ de los numeradores}}{m.c.d.\text{ de los denominadores}} = \frac{[p, e]}{(q, f)}$$

Luego señala la fórmula para hallar el máximo común divisor (m.c.d.) de dos fracciones:

$$m.c.d.\left(\frac{p}{q}, \frac{e}{f}\right) = \frac{m.c.d.\text{ de los numeradores}}{m.c.m.\text{ de los denominadores}} = \frac{(p, e)}{[q, f]}$$

A modo de ejemplo, Stupel M. (2012, p.58) muestra el m.c.m. y el m.c.d. de dos fracciones:

$$m.c.m.\left(\frac{5}{6},\frac{2}{3}\right)=\frac{[5,2]}{(6,3)}=\frac{10}{3}$$
$$m.c.d.\left(\frac{5}{6},\frac{2}{3}\right)=\frac{(5,2)}{[6,3]}=\frac{1}{6}$$

Posteriormente emplea las técnicas desarrolladas para algunos casos de números irracionales,

Esta regla también funciona para números irracionales de similar escritura como $\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\frac{3\sqrt{3}}{2}$, etc., o $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, etc.Sin embargo, no es posible encontrar m.c.m. de números irracionales de diferente tipo como $2\sqrt{2}$ y π. Del mismo modo, no hay m.c.m. para la combinación de números racionales e irracionales (Stupel, 2012, p.58).

Se da a continuación un ejemplo para hallar el m.c.m. de $\frac{2\pi}{7}$ y $\frac{5\pi}{3}$

$$\left[\frac{2\pi}{7},\frac{3\pi}{2}\right]=\frac{m.c.m.\text{ de los numeradores}}{m.c.d.\text{ de los denominadores}}=\frac{[2\pi,3\pi]}{(7,2)}=\frac{6\pi}{1}=6\pi$$

Aplicando todo lo anteriormente expuesto, es posible calcular el período de una suma o diferencia de funciones sinusoidales.

Por ejemplo dadas $f(x)=sen(3x+\pi)$ y $g(x)=sen\left(5x+\frac{\pi}{2}\right)$, el período mínimo de la suma de estas funciones sinusoidales es el mínimo común múltiplo de los períodos de ellas (Stupel, 2012, p.59).

$$\left[\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{5}\right]=\frac{[2\pi,2\pi]}{(3,5)}=\frac{2\pi}{1}=2\pi$$

Para el caso de querer obtener el período mínimo del producto de dos funciones sinusoidales resulta necesario transformar el producto de funciones en una suma de funciones por medio de identidades trigonométricas.

Después de presentar el producto de las funciones trigonométricas F (x) · G (x) como una suma de funciones trigonométricas, obtenemos:

$$F(x)\cdot G(x)=sen(\alpha x+\gamma)\cdot cos(\beta x+\delta)$$
$$=\frac{1}{2}\left[sen[(\alpha+\beta)x+\gamma+\delta]+cos[(\alpha-\beta)x+\gamma-\delta]\right]$$

El período de la suma de funciones obtenida es el mínimo común múltiplo de ambos períodos:

$\left[\frac{2\pi}{\alpha+\beta},\frac{2\pi}{\alpha-\beta}\right]=\frac{[2\pi,2\pi]}{(\alpha+\beta,\alpha-\beta)}$ (Stupel, 2012, p.59).

A modo de ejemplo, si se quiere calcular el período mínimo del producto de las funciones $f, f(x)=sen(3x)$ y $g, g(x)=cos(x)$,

$$h(x)=sen(3x)\cdot cos(x)$$

Hallamos el m.c.m. $\left[\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{1}\right]=\frac{[2\pi,2\pi]}{(3,1)}=\frac{2\pi}{1}=2\pi$, sin embargo dicho período no es mínimo, en este caso, debemos emplear la identidad trigonométrica antes señalada

$$\frac{1}{2}\left[sen[(3+1)x]+cos[(3-1)x]\right]$$

Cuyo período es: $\left[\frac{2\pi}{4},\frac{2\pi}{2}\right]=\frac{[2\pi,2\pi]}{(4,2)}=\frac{2\pi}{2}=\pi$, el cual sí es el período mínimo de la función h.

Además, reiteramos, a lo gráfico y analítico, se suman las limitaciones de los artefactos empleados en el reconocimiento de la periodicidad funcional, a saber, software de computadora o aplicaciones para celular. Estas limitaciones de los artefactos asimismo provocan dificultades en el reconocimiento en forma gráfica de dicha periodicidad, en el próximo punto veremos este caso.

4.2. Las funciones cuasi-periódicas: un punto de encuentro entre la inconmensurabilidad numérica y la cuasi-periodicidad funcional

Para el caso de las funciones cuasi-periódicas también se evidencia una necesidad de haber conceptualizado a la noción de número irracional para poder identificar este tipo de funciones ya que son muy "parecidas", en sus gráficas, a una de tipo periódico

> Si los períodos son *inconmensurables*, la suma no es una función periódica, pero las funciones así obtenidas tienen un carácter aproximadamente periódico y propiedades que las asemejan a las funciones periódicas; son casos especiales de las llamadas *funciones casiperiódicas*, de gran importancia en la matemática moderna. (Rey Pastor et al., 1969, p.421)

¿Pero qué ocurriría si un estudiante de nivel superior aún no ha logrado construir la noción de número irracional? ¿Podrá reconocer, analíticamente, una función cuasi-periódica?

Por ejemplo, la función f $(f(x)=sen(\pi x)+sen(x))$, es cuasi-periódica, o sea no es periódica, y la otra g, $(g(x)=sen(3{,}14\,x)+sen(x))$ con período mínimo $(p=100\,\pi)$. El software muestra gráficamente la aparente superposición de ambas funciones (figura 9).

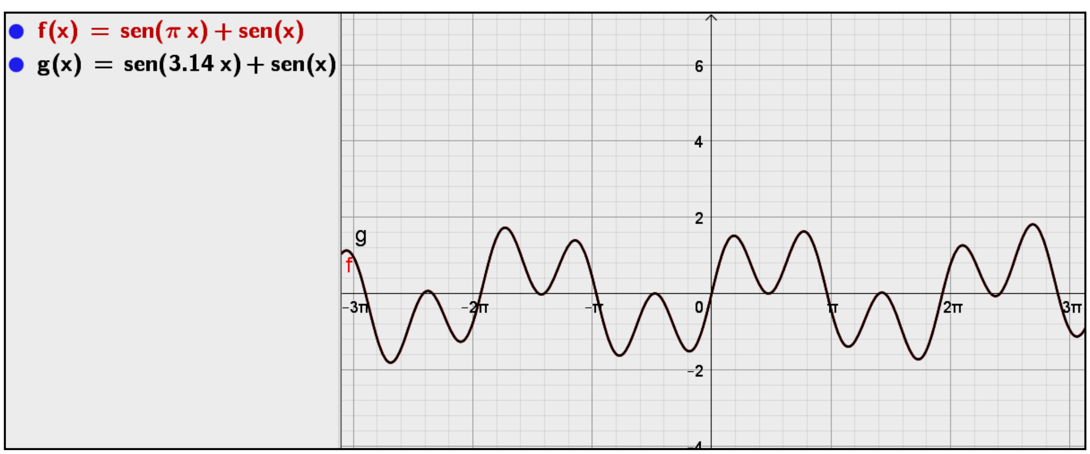

Figura 9. Comparación gráfica de dos funciones, a saber, f y g, la primera cuasi-periódica, la segunda periódica con período $p=100\,\pi$.

Pero para valores "grandes" de dominio el software comienza a mostrar diferencias "visibles" entre ambas funciones (figura 10).

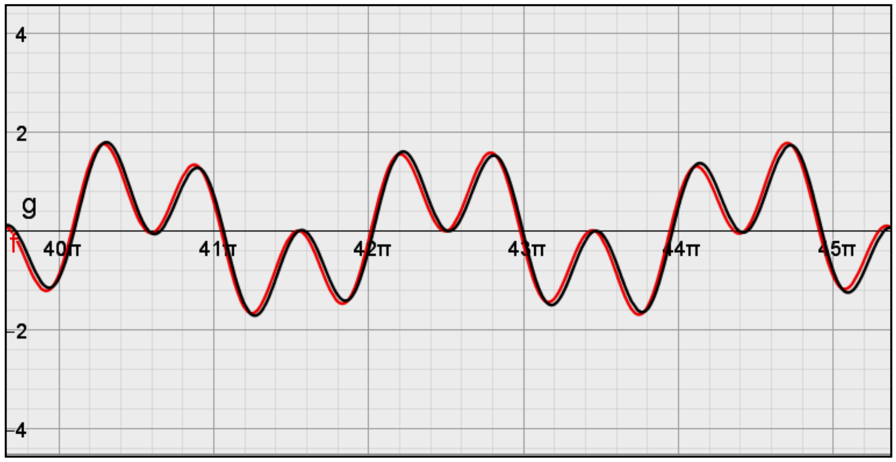

Figura 10. Comparación de las funciones f y g (figura 9) en $[40\pi; 45\pi]$.

Las dificultades surgen tanto de las representaciones gráficas de las funciones como de los aspectos analíticos. El estudiante debe observar que, en el caso de la función f, es preciso poder argumentar que "no existe período, ya que el cociente entre los períodos que componen la función es número irracional"; a saber:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{\frac{2\pi}{\pi}}{\frac{2\pi}{1}} = \frac{1}{\pi}.$$

Esta característica de la función $f(f(x) = sen(\pi \cdot x) + \sin(x))$, es decir, el no tener periodo, puede ser contrastada con un software informático. En la figura 11 se puede ver la repuesta obtenida con WolframAlpha (https://www.wolframalpha.com/).

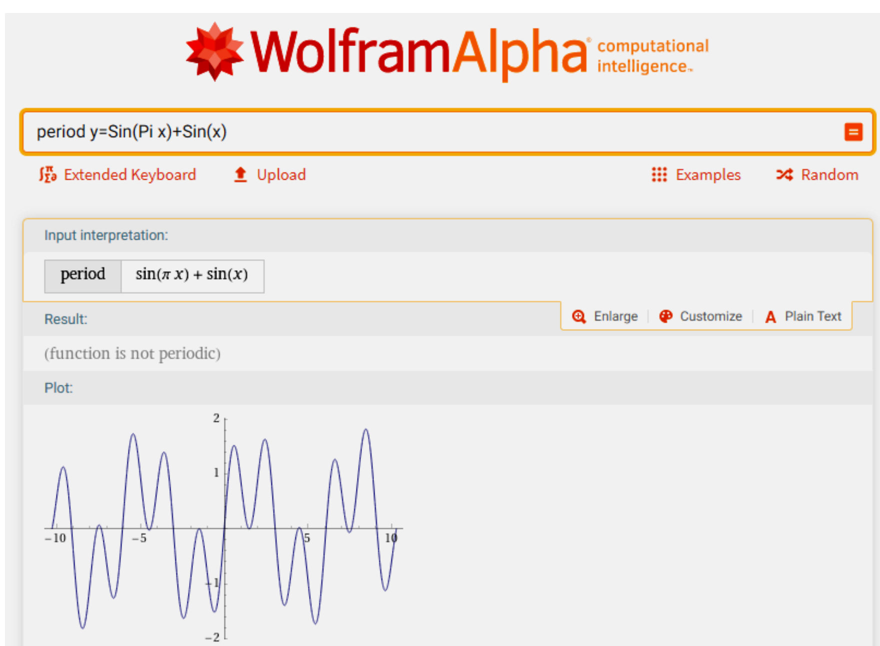

Figura 11. La función $y = sen(\pi x) + sen(x)$ no es periódica.

Sin embargo, la respuesta obtenida con el software en línea WolframAlpha no esconde la dificultad en el análisis de la periodicidad de la función *f*, sino que es muestra de la potencia del núcleo o *kernel* de este programa en la realización de los cálculos. De hecho, si se introduce el mismo análisis en otras herramientas en línea no siempre se obtiene la misma respuesta. Por ejemplo, con *Symbolab* (https://es.symbolab.com/) se obtiene, erróneamente, que la función *f* es periódica de periodo 2π (figura 12).

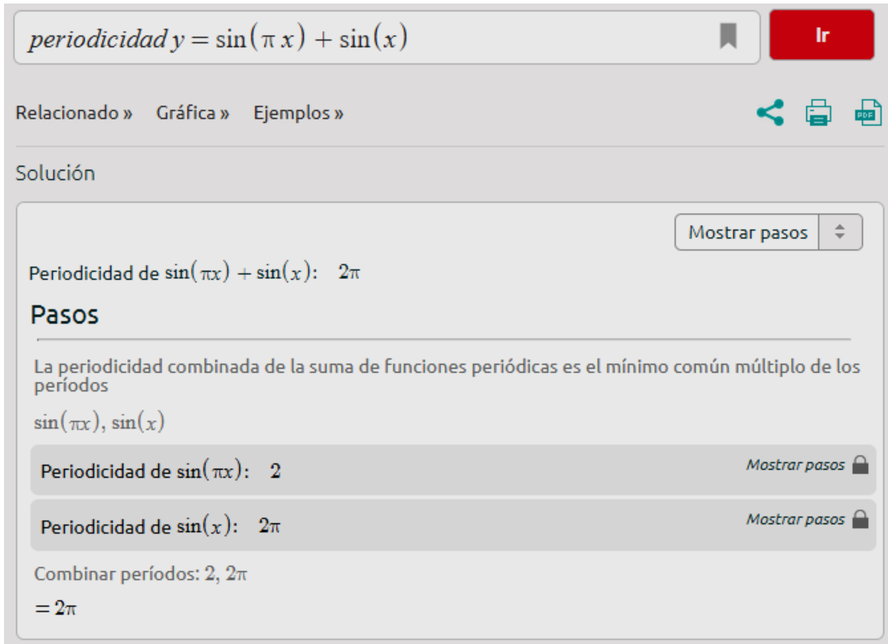

Figura 12. Respuesta errónea sobre la periodicidad de $y = sen(\pi x) + sen(x)$.

Por lo que un estudiante de nivel superior no debería "confiar ciegamente" en los resultados de software o calculadora. Debería ser crítico, por medio de las propiedades anteriormente expuestas y del trabajo sobre las cuestiones analíticas de las funciones periódicas o aperiódicas. Así, es un buen ejercicio que se plantee a futuros docentes de matemática actividades que incluyan el uso de motores de respuesta o aplicaciones para celular, donde se pueda reconocer las limitaciones de dichos artefactos.

El camino a seguir luego de que los aspectos perceptivos resultan limitados es el estudio sobre los aspectos analíticos de la función periódica. Debería el profesor de formación docente hacer emerger estas limitaciones, en el aula de matemáticas, de tal manera que surja como una "necesidad matemática" el estudio analítico por sobre lo meramente visual.

El análisis llevado adelante por Reina y Wilhelmi (2019) con veintitrés estudiantes que cursaron segundo año, siete que cursaron el tercer año, cinco que se encontraban cursando su cuarto año y dos egresados del Profesorado de Educación Secundaria en Matemática (PESM) de un Instituto de Educación Superior Docente, muestran conflictos y dificultades en el reconocimiento de una función periódica.

Se detectaron dificultades tanto en el reconocimiento gráfico, como en el analítico.

> En el presente trabajo existe evidencia de que, nuevamente, la percepción visual juega un papel importante ya que la mayoría de los estudiantes observados perciben visualmente una función periódica donde deberían observar una función aperiódica y viceversa, aun conociendo la fórmula analítica de dicha función. Los estudiantes y profesores quedan entonces sujetos a lo ostensivo, a lo visual por sobre lo analítico. (Reina y Wilhelmi, 2019, p.326)

Parece que en el trabajo de aula los profesores hacen hincapié en las representaciones de funciones periódicas trigonométricas más comunes, seno, coseno, tangente, etc. Esto último trae aparejado que al momento de observar la representación gráfica de otros tipos de funciones periódicas (no trigonométricas), cuasi-periódicas o pseudo-periódicas (como $f(x) = x + sen(x)$), aparezcan conflictos semióticos.

> La semejanza de la cuasi-periodicidad funcional con una aparente periodicidad en las representaciones gráficas de las funciones hace que los estudiantes, perciban la periodicidad en la gráfica. La aperiodicidad entonces se mimetiza con la periodicidad y viceversa. Lo ostensivo prima por sobre lo no ostensivo, se activan tanto la dimensión dual (ostensivo- no ostensivo) como la dualidad (personal- institucional) ya que el alumno debe emplear su "cognición" tanto "personal" como "institucional" (Godino et al., 2009) es allí donde se manifiestan las dificultades. (Reina y Wilhelmi, 2019, p.326)

Nuevamente se observa el fenómeno que se mostró para el caso de la percepción de la aperiodicidad de los números irracionales, la mimetización ostensiva de objetos matemáticos.

El origen del fenómeno de "mimetismo didáctico" se observa, en el caso del reconocimiento de regularidades y patrones en la búsqueda de la periodicidad y de la no periodicidad funcional, como producto de la "intersección" entre cuestiones de contrato didáctico, cuestiones relativas a la cognición y al conocimiento de las nociones matemáticas previas. (Reina y Wilhelmi, 2019, p.327)

Nuevamente empleamos la metáfora del "iceberg didáctico" para analizar las dificultades asociadas a la construcción de la noción de función periódica en formación de profesores (figura13).

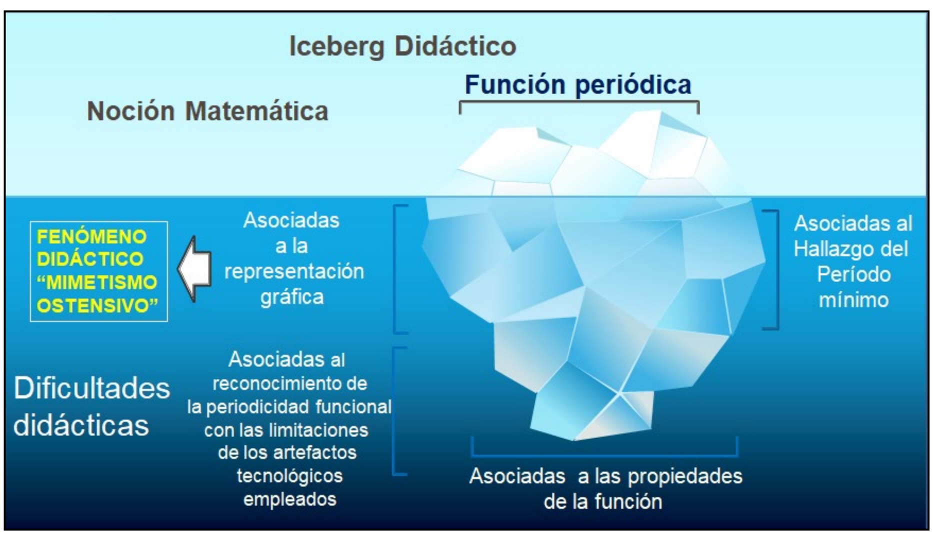

Figura 13.Iceberg didáctico para el caso de la función periódica.

El iceberg didáctico muestra en su cara visible a la noción de función periódica, y en su faz oculta las dificultades que se observaron en el proceso de estudio. Principalmente dichas dificultades se centraron en el reconocimiento de la periodicidad funcional en la representación de las diferentes gráficas de funciones, pero también en la no identificación analítica de las mismas.

La dualidad unitario-sistémico permite interpretar conflictos manifestados por estudiantes, que observan el "todo" de la imagen donde únicamente se observan las dualidades: 1) ostensivo-no ostensivo en la representación gráfica y la analítica; 2) expresión-contenido en las propiedades que se pueden atribuir a la función a partir de una interpretación de sus representaciones.

Reina y Wilhelmi (2019) concluyeron la gran dificultad para los estudiantes del hallazgo de los períodos mínimos de algunas funciones y diferenciarlos de aquellas funciones que no tenían período. Por tanto, es de gran importancia para el estudio de la periodicidad funcional el estudio analítico de funciones, de sus períodos mínimos, de funciones cuasi periódicas y de aquellas que no siendo periódicas su diferencia sí lo es, como por ejemplo:$f(x) = x - \lfloor x \rfloor$ o $g(x) = x - \lceil x \rceil$, siendo $\lfloor x \rfloor$ y $\lceil x \rceil$ las funciones piso y techo, respectivamente.

El estudio analítico se hace indispensable. Por ejemplo, la función $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$ tiene una representación sencilla (figura 14) de donde se deduce que tiene periodo 1.

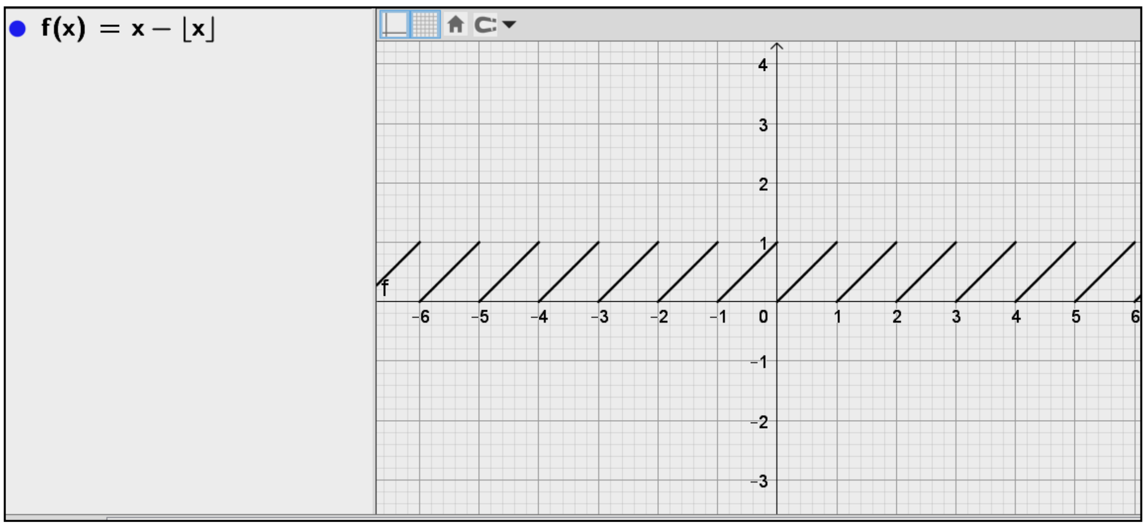

Figura 14. Representación gráfica de la función $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$.

Asimismo, la demostración analítica tampoco es complicada. En efecto, supongamos que la función dada es una función periódica. Entonces, por definición:

$$f(x+p) = f(x) \Rightarrow x + p - \lfloor x+p \rfloor = x - \lfloor x \rfloor \Rightarrow p = \lfloor x+p \rfloor - \lfloor x \rfloor \Rightarrow p \in \mathbb{Z}$$

Claramente, p es un entero ya que las dos funciones parte entera devuelven enteros. Existe $p > 0$, que satisface la ecuación $f(x+p) = f(x)$. El menor entero positivo es 1. Por lo tanto, el período de la función es 1. (Shingh, 2011, p.365).

Por tanto, la prueba o demostración del valor del período mínimo de una función es uno de los medios más idóneos para responder sobre la periodicidad de una función o sobre el período primitivo. También es esperable que ocupe un lugar en la formación de profesores.

5. A modo de conclusión

A lo largo de este trabajo hemos empleado el fenómeno de “mimetismo ostensivo” para explicar algunas dificultades didácticas en la construcción de dos objetos matemáticos diferentes como son los números irracionales y la función periódica (figura 15).

Por tanto la prueba o demostración del valor del período mínimo de una función es uno de los medios más idóneos para responder sobre la periodicidad de una función o sobre el período primitivo. También es esperable que ocupe un lugar en la formación de profesores.

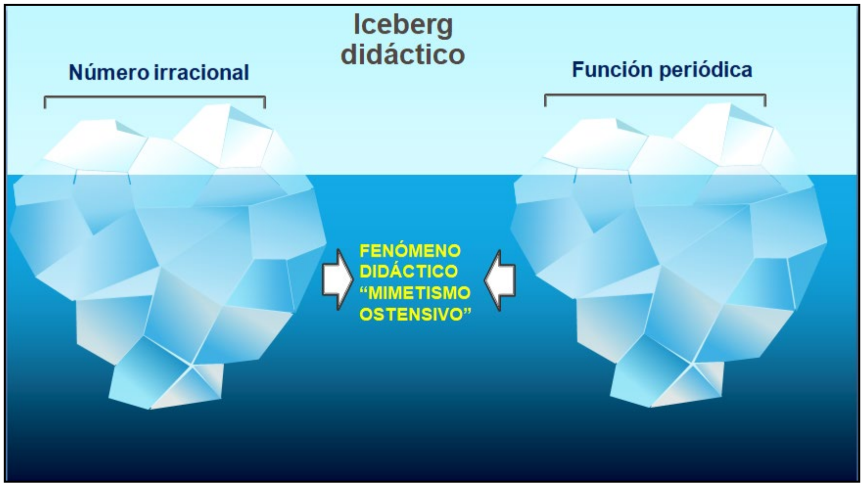

Figura 15. Dificultades didácticas compartidas en el aprendizaje de la aperiodicidad numérica y la periodicidad funcional.

A pesar de ser objetos matemáticos diferentes tienen puntos de encuentro que se han mostrado a lo largo de este trabajo.

La percepción visual en el proceso de visualización de ambas nociones matemáticas fue uno de los aspectos claves en las dificultades mostradas por los estudiantes. La percepción visual es parte del proceso de visualización de una noción matemática.

> Los procesos de visualización, y sus resultados, los ‘objetos visuales’, ‘imágenes’ o ‘visualizaciones’, intervienen asociados a determinadas tareas en las cuales se realizan ciertas prácticas apoyadas en otros objetos y procesos.[…] Los ‘objetos visuales’, y los procesos de visualización de donde provienen, forman *configuraciones* o sistemas semióticos constituidos por los objetos intervinientes y emergentes en un sistema de prácticas, junto con los procesos de significación que se establecen entre los mismos (esto es, incluyendo la trama de funciones semióticas que relaciona los objetos constituyentes de la configuración) (Godino et al., 2012, p.168).

De acuerdo a lo expresado informalmente por los estudiantes para profesor, ellos no han sido enfrentados a situaciones donde tienen que decidir si un número es irracional a partir de gran cantidad de cifras decimales, sin conocer su estructura de origen. Es más, para alumnos de Educación Secundaria, aun conociendo los números que dan origen a las cifras decimales, continúan produciendo conflictos semióticos. Por tanto, la introducción de este tipo de tareas en Educación Superior puede contribuir a que emerjan conflictos que son necesarios para que el estudiante pueda construir, de forma viable y eficaz, la noción de número irracional.

Si bien algunos profesores suelen desarrollar la noción de número irracional a partir de la de número racional en “interacción didáctica dialéctica” (Reina, 2016), implica el tratamiento no sólo de objetos matemáticos asociados y opuestos a dicha noción, sino a objetos dialécticos de tipo cognitivos presentes en las actividades solicitadas (figura 16).

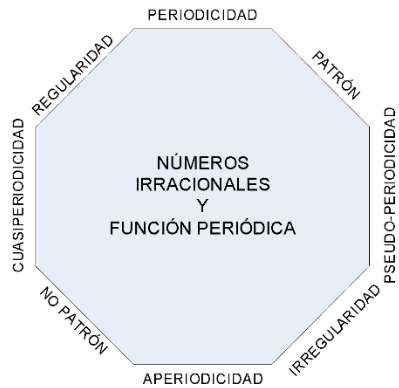

Figura 16. Posibles interacciones entre objetos matemáticos y cognitivos "dialécticos" de dos nociones matemáticas.

De forma similar ocurre con la noción de función periódica, donde también son fuente de conflictos y dificultades didácticas las dualidades mostradas en la figura 16; a saber: periodicidad ↔ aperiodicidad, *patrón* (período mínimo) ↔ no existencia de un patrón, función cuasi-periódica ↔ función pseudo-periódica, regularidad (gráfica) ↔ (irregularidad), patrón (gráfico) ↔ no patrón (gráfico).En la tabla 2 se muestra un resumen de las dificultades observadas.

Tabla 2**.** Resumen de dificultades asociadas a la construcción de número irracional y de la función periódica.

Número irracional	Función periódica
Una aproximación intuitiva de lo periódico por contextos numéricos preexistentes en ciclos o años anteriores.	Una aproximación intuitiva de lo periódico por contextos cotidianos
Desconocimiento de existencia de números irracionales con desarrollo decimal pseudo-periódico (números cebra o esquizofrénicos).	Desconocimiento de existencia de funciones cuasi-periódicas y pseudo-periódicas (por ejemplo $f(x) = x + sen(x)$)
Desconocimiento de otras representaciones igualmente válidas para el reconocimiento de la aperiodicidad numérica, por ejemplo la fracción continua.	Desconocimiento de métodos analíticos para encontrar el período mínimo de una función periódica, por ejemplo por m.c.m. entre fracciones racionales e irracionales.
Ruptura de contrato, los estudiantes no han sido enfrentados a tareas de reconocimiento de la aperiodicidad decimal de un número cuyo desarrollo implique muchas cifras.	Ruptura de contrato, los estudiantes no han sido enfrentados a tareas de reconocimiento de la cuasi-periodicidad o la aperiodicidad funcional en forma gráfica y analítica.
Cuestiones de cognición donde la percepción visual plantea potencialidades y limitaciones.	Cuestiones de cognición donde la percepción visual plantea potencialidades y limitaciones
Limitaciones de los artefactos empleados al momento del reconocimiento de la aperiodicidad numérica.	Limitaciones de los artefactos empleados al momento del reconocimiento de la periodicidad funcional.

Imposibilidad del software de mostrar las infinitas cifras decimales de un número irracional.	Imposibilidad del software de mostrar gráficamente la infinitud de una función periódica.
La demostración como método para probar si un número es o no irracional. En general se requiere de matemática avanzada para probar la irracionalidad de un número.	La demostración como método para probar si una función es periódica o detenta un período mínimo.

Todas las dificultades señaladas se encuentran en la zona intersección de las cuestiones de dimensión normativa, cognitivas y de estado de conceptualizaciones de la nociones implicadas, salvo las referidas a las limitaciones de los artefactos tecnológicos (figura 17).

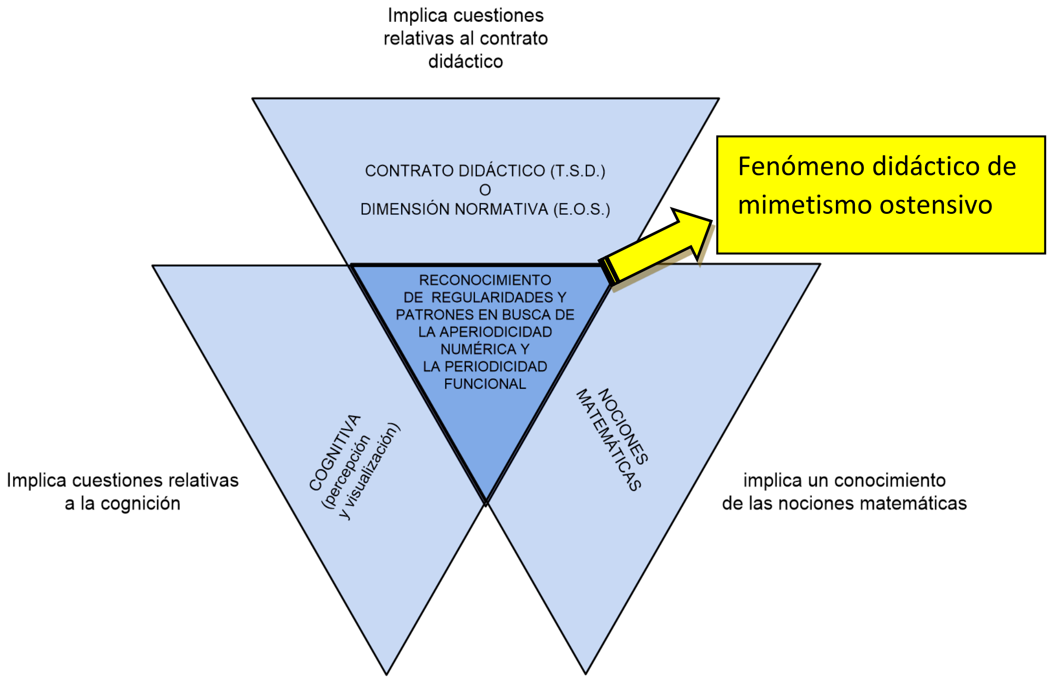

Figura 17. Emergencia del fenómeno de mimetismo ostensivo compartido en la construcción de dos nociones matemáticas.

El fenómeno de mimetismo ostensivo muestra, tanto en la introducción y desarrollo de los números irracionales como de la función periódica, un "apego" por parte de los estudiantes a lo ostensivo, a lo "visible" antes que a lo analítico. Además, esta visualización requiere de conocimientos anteriores cuya inestabilidad se observa en las diferentes respuestas.

Si solamente las interacciones provienen de aproximarse a funciones trigonométricas "tradicionales", estereotipadas o a reconocer la irracionalidad de un número real en casos "sencillos" ($\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$, etc.), el estudiante responderá en base a esos conocimientos implícitos.

Las limitaciones de software mostradas en este trabajo deberían incentivar a los futuros docentes a incorporar este tipo de actividades o tareas donde el estudiante analice críticamente las respuestas obtenidas por este tipo de artefactos y software, como muestra de la necesidad de la demostración formal en matemáticas.

En suma, la demostración o prueba es un medio necesario para determinar la periodicidad o aperiodicidad de una función o la irracionalidad de un número (con las limitaciones de los conocimientos matemáticos previos de los estudiantes) y, por lo tanto, es necesario para la construcción de estas nociones matemáticas.

Referencias

Adamczewski, B. (2013). The Many Faces of the Kempner Number. *Journal of Integer Sequences, 16*, 1–34. http://adamczewski.perso.math.cnrs.fr/Kempner.pdf

Adamczewski,B. (2013). The Many Faces of the Kempner Number. *Journal of Integer Sequences, 16*, 1–34.http://adamczewski.perso.math.cnrs.fr/Kempner.pdf

Aragón, F., Bailey, D., Borwein, J. y Borwein, P. (2013). Walking on Real Numbers. *The Mathematical Intelligencer*, *35*(1), 42–60.DOI 10.1007/s00283-012-9340-x

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Libros del Zorzal.

Buendía, G. y Montiel, G. (2009). Acercamiento socioepistemológico a la historia de las funciones trigonométricas. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *22*, 1287-1288.CLAME. https://www.clame.org.mx/documentos/alme22.pdf

Collette, J.-P. (2007). *Historia de las Matemáticas II*. Siglo XXI.

Courant, R. y Jhon, F. (1999). *Introducción al cálculo y al análisis matemático* (Vol.I). Limusa.

Delahaye, J.-P.(2004). Les nombres zébrés. *Pour la Science* 321, 90-95. https://www.pourlascience.fr/sd/logique/les-nombres-zebres-3415.php#:~:text=%E2%80%93%20Il%20s'agit%20de%20nombres,de%20chiffres%20sans%20structure%20apparente.

Euler, L. (1748). Introducción al análisis de los infinitos (Tomo 1).SAEM Thales.

Font, V., Godino J. D.y D'Amore, B. (2007). An onto-semiotic approach to representations in mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, 27(2), 2–7. http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/enfoque_ontosemiotico_representaciones.pdf

Godino, J., Batanero, C. y Font, V. (2009). The ontosemiotic approach to research in mathematics education. ZDM. *The International Journal on Mathematics Education 39* (1-2), 127–135. http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/documentos/JDGodino_CBatanero_VFont_sintesis_EOS%202009.pdf

Godino, J., Bencomo,D., Font,V. y Wilhelmi, M.R.(2006).Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma,XXVII* (2), 221-252. http://ve.scielo.org/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1011-22512006000200011

Godino, J, Cajaraville, J.A., Fernández, T. y Gonzato, M. (2012). Una aproximación ontosemiótica a la visualización en educación matemática. *Enseñanza de las Ciencias*, *30* (2) ,163-184. https://www.raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/254506/391053

Godino, J., Font, V., Wilhelmi, M.R. y De Castro, C.(2009). Aproximación a la dimensión normativa desde un enfoque ontosemiótico. *Enseñanza de las Ciencias*, *27*(1), 59–76. https://www.raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/132207/0

Komatsu, T. (1999). On inhomogeneous diophantine approximation with some quasi-periodic expressions II. *Journal de Théorie Des Nombres de Bordeaux, 11*(2), 331–334. http://www.numdam.org/item?id=JTNB_1999__11_2_331_0

Larson,R., Hostetler, R. y Edwards,B.(1995). *Cálculo y geometría analítica* (5ta ed., Vol. 1.). McGraw-Hill.

Lopéz, C. A. (2014). El infinito en la historia de la matemática. *Ciencia y Tecnología* 14, 277-298. https://www.palermo.edu/ingenieria/pdf2014/14/CyT_14_18.pdf

Pickover, C. A. (2007). *Las Matemáticas de Oz*. RBA.

Reina, L. (2016).*Simbiosis didáctica curricular entre el número irracional y la fracción continua en Educación Secundaria: restricciones, interacciones e idoneidad.* [Tesis doctoral, Universidad Nacional de Cuyo]. http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/tesis/Tesis_LReina.pdf

Reina, L. y Wilhelmi, M.R. (2017). Mimetismo ostensivo de objetos matemático. El caso de los números irracionales. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. LópezMartín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Universidad de Granada. https://digibug.ugr.es/handle/10481/45305

Reina, L. y Wilhelmi, M.R.(2019). Mimetismo ostensivo de objetos matemáticos. El caso de la función periódica en Formación de Profesorado. En K. Kapitango-A-Samba (Ed.), *Residência e Desenvolvimento Profissional Docente* (pp.305-333).CRV editora. https://editoracrv.com.br/produtos/detalhes/33747-residencia-e-desenvolvimento-profissional-docente

Reina, L. yWilhelmi, M.R. (en prensa). El problema didáctico del reconocimiento de los números irracionales en Educación Secundaria. IPN - Instituto Politécnico Nacional.

Reina, L., Wilhelmi, M.R. y Lasa, A. (2012). Configuraciones epistémicas asociadas al número irracional. Sentidos y desafíos en Educación Secundaria. *Educación Matemática*, *24*(3), 67–97.http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40525846003

Reina, L., Wilhelmi, M.R., Carranza, P. y Lasa, A. (2014). Construcción de la noción de número irracional en formación de profesores: conflictos semióticos y desafíos. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 27*, 629–637. CLAME. https://www.clame.org.mx/documentos/alme27.pdf

Rey Pastor, J., Pi Calleja, P. y Trejo, C. (1969). *Análisis matemático* (8ª ed., Vol. 1.).Kapelusz.

Singh, S. (2011).*Periodic functions*. Openstax CNX. https://cnx.org/contents/ysm8oGY0@64.8:ECSl3qg_@8/Periodic-functions

Stupel, M. (2012). On periodicity of trigonometric functions and connections with elementary number theoretic ideas. *Australian Senior Mathematics Journal, 26*(1), 50-63. https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ992374.pdf

Thomas, G. y Finney, R. (1998). *Cálculo. Una variable* (9ed.). Adisson-Wesley-Longman.

Tóth, L. (2020). On Schizophrenic Patterns in b-ary Expansions of Some Irrational Numbers. *Proceedings American Matemathical Society, 148*,461-469. https://doi.org/10.1090/proc/14863